Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Informatik

# Konstruktion der Hyperrellen Zahen

Seminararbeit

eingereicht von: Hannes Benne
geboren am: 21.06.1989
geboren in: Magdeburg

Die vorliegende Arbeit bietet einen Einblick in die Konstruktion und grundlegenden Eigenschaften der hyperreellen Zahlen.

Einleitend wird ein Überblick über die Geschichte der Infinitesimalrechnung gegeben. Als Referenz dafür wurden [DL] und [HH] verwendet.

Der Hauptteil der Arbeit widmet sich der Konstruktion der hyperreellen Zahlen, diese orientiert sich an der Darstellung in [LR] und [RB].
Zunächst wird der Begriff des Mengenfilters eingeführt, sowie wichtige Eigenschaften von Filtern bewiesen.
Darauf aufbauend wird mit Hilfe eines freien Ultrafilters die Menge der reellwertigen Folgen zu Äquivalenzklassen zusammen gefasst. Auf der Menge dieser Äquivalenzklassen – welche als Menge der hyperreelle Zahlen (${}^*\mathbb{R}$) bezeichnet wird – werden Addition, Multiplikation sowie eine Ordnungsrelation definiert und nachgewiesen, dass es sich bei der so konstruierten Struktur um eine angeordnete Körpererweiterung der reellen Zahlen handelt. Anschließend werden einige Eigenschaften der hyperreellen Zahlen, insbesondere die Existenz infiniter und infinitesimaler Zahlen, ausgearbeitet.

Abschließend wird anhand der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen exemplarisch gezeigt, wie sich Konzepte aus der Analysis für hyperreellen Zahlen umsetzen lassen.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Geschichte

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Einblick über die Geschichte unendlicher großer (infiniter) und unendlich kleiner (infinitesimaler) Zahlen. Eine exakte Definition der Begriffe *infinit* und *infinitesimal* findet sich in Abschnitt 3.7.

Erste Spuren der Infinitesimalrechnung findet sich bereits in der Antike, etwa bei der Betrachtung von Hornwinkeln oder der Berechnung von Kreisflächen durch den griechischen Philosophen Antiphon. Antiphon berechnete die Kreisfläche, indem er sie durch ein gleichseitiges Polygon annäherte, dessen Seitenzahl er fortwährend verdoppelte. Nach Antiphon müsse das Polygon den gesamten Kreis ausfüllen, wenn man diese Verdoppelungsmethode unendlich oft durchführe. Nach Antiphon entwickelte Eudoxos von Knidos die Exhaustionsmethode, eine rudimentäre Form der Integralrechnung. Allerdings vermieden Eudoxos und später auch Archimedes – welcher die Exhaustionsmethode weiter entwickelte, um bspw. die Flächen unter Parabeln und die Kreiszahl pi anzunähern – bei ihren Rekursionsmethoden den Grenzübergang ins Unendliche.

Nach der Antike herrschte lange Zeit Stillstand in der Entwicklung der Infinitesimalmathematik, bis man um 1400 begann antike Manuskripte zu erforschen.
Im 16. und Anfang des 17. Jahrhunderts leisteten eine Vielzahl von Mathematikern Beiträge zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Zu nennen sind hier bspw. Bonaventura Cavalieri – ein Schüler Galileis, welcher bemerkte, dass Flächen aus infinitesimalen Teilflächen zusammen gesetzt sind – oder Mathematiker wie Fermat, Descartes und Barrow, welche sich mit dem Tangentenproblem auseinandersetzten.
Ihre Blütezeit erlebte die Infinitesimalrechnung Ende des 17. Jahrhunderts unter Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton. Beide entwickelten unabhängig voneinander einen systematischen Zugang zur Differential- und Integralrechnung.
Newtons Beschäftigung mit der Infinitesimalrechnung hatte physikalische Motive. Er beschäftigte sich unter anderem mit Kinematik und nutzte die Differentialrechnung um Momentangeschwindigkeiten zu bestimmen. Newton war es auch, der den Fundamentalsatz der Analysis formulierte. Dabei wurde er von seinem Lehrer Isaac Barrow beeinflusst, welcher bereits Beispiele dafür gefunden hatte, dass Integrieren und Differenzieren inverse Operationen sind.
Leibniz beschäftigte sich aus einer geometrischen Perspektive mit dem Tangentenproblem. Die Steigung von Tangenten an einer Kurve berechnete er mittels Quotient unendlich kleiner Größen (Seiten eines infinitesimalen Steigungsdreiecks). Das inverse Tangentenproblem - also die Berechnung von Flächeninhalten unter einer Kurve - verstand Leibniz als Summieren von unendlich kleinen Rechtecken. Von Leibniz, dem eine geschickte Notation besonders wichtig war, stammen die vorteilhaften Bezeichnungen der Form $\frac{dx}{dy}$ und $\int$ für Differentiale und Integrale. Leibniz forderte auch die Einführung eines Zahlensystems, welches infinite und infinitesimale Elemente enthält und in welchem sich wie in den reellen Zahlen rechnen lässt, konnte jedoch kein solches konstruieren.
Die Begründer der Infinitesimalrechnung pflegten häufig einen intuitiven Umgang mit unendlich kleinen und großen Größen, ohne eine sichere mathematische Grundlage dafür

zu schaffen.
Die Paradoxien die dabei auftraten wurden insbesondere von Georg Berkeley in der Arbeit 'The Analyst' kritisiert. Ein häufig zitiertes Beispiel von Berkeleys Kritik ist die Bestimmung der Tangente an der Normparabel:

**Beispiel 1.** Sei $y = x^2$ und $0 \neq dx$ infinitesimal. Dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = 2x + dx = 2x.$$

Berkeley bemängelt, dass die Größe $dx$ im letzten Schritt vernachlässigt wird, wobei sie doch als ungleich Null vorausgesetzt wurde. Dass die Methoden von Leibniz und Newton dennoch richtige Ergebnisse liefert, schreibt Berkeley der gegenseitigen Kompensation von Fehlern zu.
Wegen dieser Unzulänglichkeiten wurde die Infinitesimalrechnung im 19. Jahrhundert, zugunsten der von Karl Weierstraß entwickelten und heute noch gebräuchlichen $\varepsilon - \delta -$ Methoden, aus der Analysis verbannt.

Eine Rehabilitation erfuhr die Verwendung von unendliche kleinen und großen Zahlen durch die Entwicklung der Nichtstandard Analysis in den 60er Jahren. Abraham Robinson konnte einen geordneten Körper konstruieren, welcher infinite und infinitesimale Elemente enthält, die reellen Zahlen umfasst und nutzbringend für die Analysis verwendet werden kann und erfüllte so den Wunsch nach einem Zahlensystem, mit den von Leibniz geforderten Eigenschaften. Auf diese Weise konnte die Infinitesimalrechnung auf ein stabiles Fundament gestellt werden.

# 2 Filter

Bei der Konstruktion der hyperreellen Zahlen soll der Ring der reellwertigen Folgen auf geeignete Weise faktorisiert werden. Dafür werden Folgen miteinander identifiziert, wenn sie fast überall gleich sind. Um die Eigenschaft "fast überall gleich"exakt zu fassen, wird sich der Begriff des Mengenfilters als hilfreich erweisen.

**Definition 1.** Sei $M$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq P(M)$ heißt *Filter* über M, wenn gilt:
U1) $\emptyset \notin \mathcal{U}$, $M \in \mathcal{U}$;
U2) $U_1 \in \mathcal{U}$ und $U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$;
U3) $U_1 \in \mathcal{U}$ und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq M \Rightarrow U_2 \in \mathcal{U}$.

Wenn zudem gilt, dass es zu $\mathcal{U}$ keinen echten Oberfilter gibt, d.h. wenn für alle Filter $\mathcal{V}$ über $M$ gilt:
U4) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V}$,
dann heißt $\mathcal{U}$ *Ultrafilter* über $M$.

**Definition 2.** Ein Filter heißt *frei*, wenn er keine endlichen Mengen enthält. Ein Filter heißt *fixiert*, wenn er endliche Mengen enthält.

**Satz 1** (Lemma von Zorn)**.** Jede partiell geordnete Menge, in der alle nicht-leeren total geordneten Mengen eine obere Schranke haben, besitzt mindestens ein maximales Element.

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas lässt sie die Existenz hinreichend vieler Ultrafilter nachweisen.

**Satz 2.** Zu jedem Filter $\mathcal{U}_0$ über $M$ existiert ein Ultrafilter über $M$, der $\mathcal{U}_0$ umfasst.

*Beweis.* Für einen beliebigen Filter $\mathcal{U}_0$ setzt man $X := \{\mathcal{U} \subseteq P(M) : \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}\, und\, \mathcal{U}\ Filter\}$. Durch die Teilmengenrelation ist $X$ partiell geordnet. Wenn jede nicht-leere und total geordnete Teilmenge von $X$ eine obere Schranke hat, folgt aus dem Lemma von Zorn, dass X ein maximales Element besitzt. Dies ist gerade der gesuchte Ultrafilter.
Sei also $\emptyset \neq K \subseteq X$, $K$ total geordnet. Setze:

$$\mathcal{H} := \bigcup_{\mathcal{U} \in K} \mathcal{U} = \{A : A \in \mathcal{U} \text{ für ein } \mathcal{U} \in K\}.$$

Es gilt $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{H}$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ für alle $\mathcal{U} \in K$. Das Mengensystem $\mathcal{H}$ ist also obere Schranke von $K$, wenn es die Filtereigenschaften U1)–U3) erfüllt:
U1) Wegen $\emptyset \notin \mathcal{U}$ für alle $\mathcal{U}$, ist $\emptyset \notin \mathcal{H}$. Wegen $M \in \mathcal{U}_0$ und $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$ ist $M \in \mathcal{H}$.
U2) Seien $A, B \in H$. Dann gibt es $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ mit $A \in \mathcal{U}_1,\ B \in \mathcal{U}_2$. Wegen der Totalordnung von $K$ folgt $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ oder $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$. Damit ist $A, B \in \mathcal{U}_1$ oder $A, B \in \mathcal{U}_2$. Da $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Filter sind, ist $A \cap B \in \mathcal{U}_1$ oder $A \cap B \in \mathcal{U}_2$. Daher ist wegen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{H}$ auch $A \cap B \in \mathcal{H}$.
U3) Sei $A \in \mathcal{H}$ und $A \subseteq B \subseteq M$. Dann gibt es ein $\mathcal{U} \in K$ mit $A \in \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ ein Filter ist, gilt $B \in \mathcal{U}$. Wegen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ also auch $B \in \mathcal{H}$. □

Meist ist es unpraktisch, direkt mit der Definition von Ultrafiltern zu arbeiten. Für viele der Beweise in Abschnitt 3 wird daher die folgende Charakterisierung von Ultrafiltern verwendet.

**Satz 3.** Sei $\mathcal{U}$ ein Filter über $M$. Dann sind äquivalent:
1) Es ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über M.
2) Für alle $A \subseteq M$ gilt $A \in \mathcal{U}$ oder $M \setminus A \subseteq \mathcal{U}$.

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und $M \setminus A \notin \mathcal{U}$. Dann ist $A \in \mathcal{U}$ zu zeigen.
Durch $\mathcal{V} := \{C \subseteq M : A \cap B \subseteq C \text{ für ein } B \in \mathcal{U}\}$ ist ein Filter auf $M$ gegeben:
U1) Wegen $M \in \mathcal{U}, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ist $M \in \mathcal{V}$. Wenn $B \in \mathcal{U}$ so ist $B \nsubseteq M \setminus A$ (weil $M \setminus A \notin \mathcal{U}$). Daher ist $A \cap B$ nicht leer und $\emptyset \notin \mathcal{V}$.
U2) Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{V}$. Dann gibt es $B_1, B_2 \in \mathcal{U}$ mit $A \cap B_1 \subseteq C_1$ und $A \cap B_2 \subseteq C_2$. Daher ist $A \cap (B_1 \cap B_2) \subseteq C_1 \cap C_2$. Wegen $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}$ ist somit auch auch $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{V}$.
U3) Sei $C_1 \in \mathcal{V}$ und $C_1 \subseteq C_2 \subseteq M$. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{U}$, sodass $A \cap B \subseteq C_1$ und damit auch $A \cap B \subseteq C_1$. Daher ist $C_2 \in \mathcal{V}$.
Des Weiteren gilt $A \in \mathcal{V}$ wegen $A \cap B \subseteq A$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ wegen $A \cap B \subseteq B$. Weil $\mathcal{U}$ ein

Ultrafilter ist, folgt aus $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ schon $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Damit gilt $A \in \mathcal{U}$.
($\Leftarrow$) Für alle $A \subseteq M$ gelte $A \in \mathcal{U}$ oder $M \setminus A \in \mathcal{U}$. Sei $\mathcal{U}$ indirekt kein Ultrafilter. Dann gibt es einen Filter $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ und ein $A \in \mathcal{V}$ mit $A \notin \mathcal{U}$. Dann ist $M \setminus A \in \mathcal{U}$ und wegen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ auch $M \setminus A \in \mathcal{V}$. Somit ist $A \cap (M \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{V}$, im Widerspruch zur Filtereigenschaft U1). $\square$

**Bemerkung 1.** Nach Satz 3 ist in Ultrafiltern mindestens eine der Mengen $A, M \setminus A$ enthalten. Für alle Filter gilt, dass höchstens eine der beiden Mengen enthalten ist. Andernfalls wäre – in Widerspruch zu U1) – $A \cap (M \setminus A) = \emptyset$ im Filter enthalten.

**Satz 4.** Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über $M$ und $A_1, ..., A_n \subseteq M$. Dann gilt:
$\bigcup\limits_{k \in \{1,...,n\}} A_k \in \mathcal{U} \Rightarrow A_k \in \mathcal{U}$ für ein $k \in \{1, ..., n\}$.

*Beweis.* Sei indirekt $A_k \notin \mathcal{U}$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$. Dann ist $M \setminus A_k \in \mathcal{U}$ für alle $k$ und damit $\bigcap\limits_k M \setminus A_k = M \setminus (\bigcup\limits_k A_k) \in \mathcal{U}$. Somit erhält man den Widerspruch $\bigcup\limits_k A_k \cap (M \setminus (\bigcup\limits_k A_k)) = \emptyset \in \mathcal{U}$. $\square$

**Beispiel 1.** 1) Sei $M$ eine unendliche Menge. Dann ist $\mathcal{F}_{co} := \{A \subseteq M : M \setminus A \textit{ endlich}\}$ ein Filter über $M$. Man nennt $\mathcal{F}_{co}$ den Filter der koendlichen Teilmengen.
2) Ist $m \in M$ fest und $\mathcal{F}_m = \{A \subseteq M : m \in A\}$, dann ist $\mathcal{F}_m$ ein Ultrafilter über $M$. Man nennt $\mathcal{F}_m$ den von m erzeugten Hauptfilter.

**Satz 5.** Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Dann gilt:
1) Es ist $\mathcal{U}$ frei, genau dann wenn er den Filter der koendlichen Teilmengen umfasst ($\mathcal{F}_{co} \subseteq \mathcal{U}$);
2) Es ist $\mathcal{U}$ fixiert, genau dann wenn ein $m \in M$ existiert, sodass $\mathcal{F}_m = \mathcal{U}$.

*Beweis.* 1) ($\Rightarrow$) Sei $M$ eine unendliche Menge und $\mathcal{F}_{co} \nsubseteq \mathcal{U}$. Dann gibt es eine Menge $A \in \mathcal{F}_{co}$ (d.h. $M \setminus A$ endlich) mit $A \notin \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ Ultrafilter ist, gilt $M \setminus A \in \mathcal{U}$. Somit ist $\mathcal{U}$ nicht frei, da eine endliche Menge in $\mathcal{U}$ liegt.
($\Leftarrow$) $\mathcal{F}_{co} \subseteq \mathcal{U}$ und $A \in \mathcal{U}$ beliebig. Weil $\mathcal{U}$ Ultrafilter, ist $M \setminus A \notin \mathcal{U}$ und somit $M \setminus A \notin \mathcal{F}_{co}$. Daher ist $M \setminus (M \setminus A) = A$ unendlich. Also ist $\mathcal{U}$ frei.
2) ($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{U}$ fixiert und sei $\{a_1, ..., a_n\}$ die kleinste endliche Menge in $\mathcal{U}$. Wenn $n > 1$, so wäre wegen $\{a_1, ..., a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2, ..., a_n\}$, im Widerspruch zur Minimalität, $\{a_1\}$ oder $\{a_2, ..., a_n\}$ in $\mathcal{U}$. Es gibt daher ein $m \in M$, sodass $\{m\} \in \mathcal{U}$. Ist $m \in A$ so ist $\{m\} \subseteq A$ und $A \in \mathcal{U}$. Wenn $m \notin A$, dann ist $m \in M \setminus A$, also $M \setminus A \in \mathcal{U}$ und $A \notin \mathcal{U}$. Daher gilt $\mathcal{U} = \mathcal{F}_m = \{A \subseteq M : m \in A\}$.
($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{F}_m = \mathcal{U}$. Dann enthält $\mathcal{U}$ mit $\{m\}$ eine endliche Menge. Also ist $\mathcal{U}$ fixiert. $\square$

**Bemerkung 2.** Wegen Satz 2 und Satz 5 gibt es auf jeder unendlichen Menge – insbesondere auf den natürlichen Zahlen – mindestens einen freien Ultrafilter.

# 3 Konstruktion der hyperreellen Zahlen

## 3.1 Der Folgenring $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Auf der Menge der reellwertigen Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$ wird die Addition und Multiplikation folgendermaßen definiert:

$$\oplus : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (a,b) \mapsto a \oplus b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad ;$$

$$\odot : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (a,b) \mapsto a \odot b = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zwei Folgen werden also addiert/multipliziert, indem man ihre einzelnen Komponenten addiert/multipliziert. Es ist klar, dass für $\oplus$ und $\odot$ die Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und das Distributivgesetz von den reellen Zahlen vererbt werden. Weiterhin gibt es ein Einselement 1=(1,1,...), Nullelement 0=(0,0,...) und additive Inverse. Das bedeutet $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
Die reellen Zahlen lassen sich in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ einbetten, indem man reelle Zahlen mit konstanten Folgen identifiziert. Zudem gibt es Folgen die unendlich kleine Zahlen (bspw. $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$) und unendlich große Zahlen (bspw. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$) repräsentieren. Damit erfüllt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ viele der Eigenschaften, welche man von den hyperreellen Zahlen fordert. Allerdings ist diese Menge mit den obrigen Verknüpfungen kein Körper, weil sie Nullteiler enthält:

$$(1, 0, 1, ...) \odot (0, 1, 0, ...) = (0, 0, 0, ...) = 0.$$

Weil $\oplus, \odot$ auf $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot$ übereinstimmen, wird ab jetzt $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ statt $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ geschrieben.

## 3.2 Die Relation $\backsim$

Die Idee ist nun $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ so zu faktorisieren, dass Folgen, die sich nur an unwesentlich vielen Stellen unterscheiden, zueinander äquivalent sind. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Relation:

**Definition 3.** Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definieren wir die Relation:

$$a \backsim b :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Gilt $a \backsim b$, sagt man auch a und b seien fast überall gleich.

Weil $\mathcal{U}$ entweder die ungeraden oder die geraden Zahlen enthält, wird im obrigen Beispiel für Nullteiler entweder die Folge (0,1,0,...) oder die Folge (1,0,1,...) äquivalent zu (0,0,0,...).

**Satz 6.** $\backsim$ ist eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* Reflexivität: $a \backsim a \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = a_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$.
Symmetrie: $a \backsim b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : b_n = a_n\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow b \backsim a$.

Transitivität: $a \backsim b,\ b \backsim c \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\},\ \{n \in \mathbb{N} : b_n = c_n\} \in \mathcal{U}$
$\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n = c_n\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n = c_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n = c_n\} \in \mathcal{U}$
$\Leftrightarrow a \backsim c.$ $\square$

## 3.3 Der Körper der hyperreellen Zahlen

Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\backsim$ nennt man die *Menge der hyperreellen Zahlen*:

$$^*\mathbb{R} := \mathbb{R}/_{\backsim} = \{\overline{a} : a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}.$$

Für die Äquivalenzklassen wird folgendermaßen eine Addition und Multiplikation definiert:

$$^*+ : {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R},\ (a, b) \mapsto \overline{a}\,^*\!+\overline{b} = \overline{a+b}$$

$$^*\cdot : {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R},\ (a, b) \mapsto \overline{a}\,^*\!\cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

**Satz 7.** Das Tripel $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot)$ ist ein Körper.

*Beweis.* Zunächst ist zu zeigen, dass die Verknüpfungen $^*+$ und $^*\cdot$ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten von $\overline{a}$ und $\overline{b}$, sind.
Wohldefiniertheit von $^*+$ : Seien $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{a} = \overline{a'}$ und $\overline{b} = \overline{b'}$.
Dann sind $\{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\},\ \{n \in \mathbb{N} : b_n = b'_n\} \in \mathcal{U}$. Daher $A := \{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n = b'_n\} \in \mathcal{U}$. Sei nun $m \in A$, dann gilt $a_m = a'_m$, $b_m = b'_m$ und somit $a_m + b_m = a'_m + b'_m$. Deswegen ist $m \in B := \{n \in \mathbb{N} : a_n + b_n = a'_n + b'_n\}$. Damit ist $A \subseteq B$ woraus $B \in \mathcal{U}$ folgt. Also gilt $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$.
Wohldefiniertheit von $^*\cdot$ : Analog.

Assoziativgesetz $({}^*+)$ : $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in {}^*\mathbb{R} : (\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a+b}+\overline{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.
Kommutativgesetz $({}^*+)$ : $\forall \overline{a}, \overline{b} \in {}^*\mathbb{R} : \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a}$.
Nullelement: $\overline{0} = \overline{(0, 0, 0, ...)}$. $\forall \overline{a} \in {}^*\mathbb{R} : \overline{a} + \overline{0} = \overline{a+0} = \overline{a}$.
Additives Inverse: $\forall \overline{a} \in {}^*\mathbb{R}\ \exists -\overline{a} \in {}^*\mathbb{R} : \overline{a}+(-\overline{a}) = \overline{a+(-a)} = \overline{(a_1, a_2, ...) + (-a_1, -a_2, ...)} = \overline{(0, 0, ...)} = \overline{0}$.

Assoziativgesetz $({}^*\cdot)$ : $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in {}^*\mathbb{R} : (\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a \cdot b} \cdot \overline{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{a} \cdot \overline{b \cdot c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$.
Kommutativgesetz $({}^*\cdot)$ : $\forall \overline{a}, \overline{b} \in {}^*\mathbb{R} : \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.
Einselement: $\overline{1} = \overline{1, 1, 1, ...}$ $\forall a \in {}^*\mathbb{R} : \overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a \cdot 1} = \overline{a}$.
Multiplikatives Inverse: $\forall \overline{a} \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{\overline{0}\} \exists \overline{a}^{-1} \in {}^*\mathbb{R} : \overline{a} \cdot \overline{a}^{-1} = \overline{1}$.
Sei $\overline{a} \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{\overline{0}\}$ und sei $a' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ folgendermaßen definiert: $a' = (a'_1, a'_2, a'_3, ...)$ mit
$a'_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_n = 0 \\ a_n & \text{falls } a_n \neq 0 \end{cases}$
Die Folge $a'$ hat keine Nulleinträge, weswegen ihre Inverse in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch $a'^{-1} = (a_1'^{-1}, a_2'^{-1}, a_2'^{-1}, ...)$

gegeben ist. Deswegen hat $\overline{a'}$ ein Inverse in ${}^*\mathbb{R}$: $\overline{a'} \cdot \overline{a'^{-1}} = \overline{a' \cdot a'^{-1}} = \overline{1}$.
Wegen $\overline{a} \neq \overline{0}$ ist $\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \notin \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ Ultrafilter, folgt $\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Daraus folgt $\overline{a} = \overline{a'}$ womit $\overline{a}$ invertierbar ist.

Distributivgesetz: $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in {}^*\mathbb{R}: \ \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a \cdot (b + c)} = \overline{a \cdot b + a \cdot c} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$. □

**Algebraische Interpretation**
Eine alternative Möglichkeit die Elemente von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in Äquivalenzklassen zusammen zufassen, ist die Faktorisierung nach einem maximalem Ideal $\mathcal{I}$. Dann folgt nach Satz 8 direkt, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{I}}$ ein Körper ist.

**Definition 4.** Sei $\mathcal{I}$ eine Teilmenge eines Ringes $R$. $\mathcal{I}$ heißt *Ideal*, wenn gilt:
1) $0 \in \mathcal{I}$;
2) Für alle $a, b \in \mathcal{I}$ ist $a - b \in \mathcal{I}$;
3) Für alle $a \in \mathcal{I}$, $r \in R$ sind $ar$, $ra \in \mathcal{I}$.
Ein Ideal $\mathcal{I}$ heißt *maximal*, wenn zudem für alle Ideale $\mathcal{J}$ gilt:
4) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \subsetneq R \Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{J}$.

**Satz 8.** Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Der Faktorring $R/_{\mathcal{I}}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal in $R$ ist.

**Satz 9.** Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathcal{I}$ ein echtes Ideal in $R$. Wenn für alle $a \in R \setminus \mathcal{I}$ ein $b \in R$ existiert, sodass $1 - ab \in \mathcal{I}$, dann ist $\mathcal{I}$ maximal.

**Satz 10.** Es ist $\mathcal{I} = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a \backsim 0\}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

*Beweis.* 1) Wegen $0 \backsim 0$ ist $0 \in \mathcal{I}$.
2) Seien $a, b \in \mathcal{I}$. Dann gilt:
$\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n = 0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n - b_n = 0\} \in \mathcal{U}$. Also $a - b \backsim 0$ und somit $a - b \in \mathcal{I}$.
3) Sei $a \in \mathcal{I}$ und $r \in R$. Dann gilt:
$\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n \cdot r = 0\} \in \mathcal{U}$. Also $ar \backsim 0$, $ar \in \mathcal{I}$.
4) Sei $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$. Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \notin \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ Ultrafilter ist, gilt:
$\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Man definiert eine weitere Folge $b \in R$ durch:
$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & \text{falls } a_n = 0 \\ 0 & \text{falls } a_n \neq 0 \end{cases}$$
Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : a_n b_n = 1\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$. D.h. $ab \backsim 1$ und somit $1 - ab \backsim 0$. Also ist $1 - ab \in \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}$ ist nach Satz 9 maximal. □

## 3.4 Ordnung auf den hyperreellen Zahlen

Auf der Menge der hyperreellen Zahlen wird folgendermaßen eine Ordnung definiert:

$$\overline{a} \,{}^*\!\leq \overline{b} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}.$$

**Satz 11.** Es ist ${}^*\!\leq$ eine Totalordnung auf ${}^*\mathbb{R}$.

*Beweis.* Wohldefiniertheit: Seien $\overline{a} = \overline{a'}, \overline{b} = \overline{b'}$, sodass $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{b}$ mit $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Dann gilt $\{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\}, \{n \in \mathbb{N} : b_n = b'_n\}, \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$ und somit $A := \{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n = b'_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$. Für ein $m \in A$ gilt $a_m = a'_m, b_m = b'_m$ und $a_m \leq b_m$, woraus $a'_m \leq b'_m$ folgt. D.h. $A \subseteq \{n \in \mathbb{N} : a'_n \leq b'_n\}$. Somit liegt $\{n \in \mathbb{N} : a'_n \leq b'_n\}$ in $\mathcal{U}$ und es gilt $\overline{a'}\,{}^*\!\leq \overline{b'}$.

Reflexivität: Wegen $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, gilt $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{a}$ für alle $\overline{a} \in {}^*\mathbb{R}$.
Antisymmetrie: Seien $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{b}$ und $\overline{b}\,{}^*\!\leq \overline{a}$. Dann sind $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\}, \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{U}$. Daraus folgt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$. Also gilt $\overline{a} = \overline{b}$.
Transitivität: Seien $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{b}$ und $\overline{b}\,{}^*\!\leq \overline{c}$. Dann gilt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\}, \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq c_n\} \in \mathcal{U}$. Folglich gilt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : a_b \leq c_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n\} \in \mathcal{U}$. Das heißt $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{c}$.

Totalordnung: Weil $\leq$ eine Totalordnung auf $\mathbb{R}$ ist, gilt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} = \mathbb{N}$ und somit $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ Ultrafilter ist, folgt nach Satz 4 $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$ oder $\{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{U}$. Also ist $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{b}$ oder $\overline{b}\,{}^*\!\leq \overline{a}$. □

**Satz 12.** Das Paar $({}^*\mathbb{R}, {}^*\!\leq)$ ist ein geordneter Körper.

*Beweis.* 1. Ordnungsaxiom: Seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\overline{a}\,{}^*\!\leq \overline{b}$. Dann gilt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$. Weil $\leq$ auf $\mathbb{R}$ verträglich mit der Addition ist, folgt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n + c_n \leq b_n + c_n\} \in \mathcal{U}$. Also $\overline{a}\,{}^*\!+ \overline{c}\,{}^*\!\leq \overline{b}\,{}^*\!+ \overline{c}$.
2. Ordnungsaxiom: Seien $\overline{a}, \overline{b} \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\overline{0}\,{}^*\!\leq \overline{a}$ und $\overline{0}\,{}^*\!\leq \overline{b}$. Dann sind $\{n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n\}, \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq b_n\} \in \mathcal{U}$. Weil $\leq$ auf $\mathbb{R}$ das 2. Ordnungsaxiom erfüllt, folgt $\{n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq b_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \cdot b_n\} \in \mathcal{U}$. Also $\overline{0}\,{}^*\!\leq \overline{a}\,{}^*\!\cdot \overline{b}$. □

**Bemerkung 3.** Analog zu ${}^*\!\leq$ werden ${}^*\!\geq$, ${}^*\!<$, ${}^*\!>$ definiert:
$\overline{a}\,{}^*\!\geq \overline{b} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq b_n\} \in \mathcal{U}$.
$\overline{a}\,{}^*\!< \overline{b} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{U}$.
$\overline{a}\,{}^*\!> \overline{b} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n > b_n\} \in \mathcal{U}$.

## 3.5 Einbettung von $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen lassen sich, durch die in Satz 13 definierte Abbildung, in die hyperreellen Zahlen einbetten.

**Satz 13.** Die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}, r \mapsto \overline{(r, r, ...)}$$

ist ein Monomorphismus.

*Beweis.* Homomorphismus: $\phi(rs) = \overline{(rs, rs, ...)} = \overline{(r, r, ...)}\, {}^*\!\cdot\, \overline{(s, s, ...)} = \phi(r)\, {}^*\!\cdot\, \phi(s)$.
$\phi(r+s) = \overline{(r+s, r+s, ...)} = \overline{(r, r, ...)}\, {}^*\!+ \overline{(s, s, ...)} = \phi(r)\, {}^*\!+ \phi(s)$.
Injektivität: $\phi$ ist ein Homomorphismus zwischen Körpern und nicht die Nullabbildung, daher injektiv. Alternativ lässt sich die Injektivität einfach nachrechnen:
Sei $r \neq s$. Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$. Daher gilt $\overline{(r, r, ...)} \neq \overline{(s, s, ...)}$ und somit ist $\phi(r) \neq \phi(s)$. □

**Bemerkung 4.** Anhand der Abbildung $\phi$ wird ersichtlich, warum für die Konstruktion der hyperreellen Zahlen ein freier Ultrafilter benötigt wird. Würde ein fixierter Filter verwendet, wäre $\phi$ surjektiv und somit wäre ${}^*\mathbb{R}$ isomorph zu den reellen Zahlen.

*Beweis.* Sei $\mathcal{U}$ ein fixierter Ultrafilter. Nach Satz 5 existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\{m\} \in \mathcal{U}$. Damit gilt für alle $\overline{a} = \overline{(a_1, a_2, a_3, ...)} \in {}^*\mathbb{R}$: $\phi(a_m) = \overline{(a_m, a_m, ...)} = \overline{(a_1, a_2, ..., a_m, ...)}$.
D.h. $\phi$ ist surjektiv. □

Die reellen Zahlen lassen sich also als Teilmenge der hyperreellen Zahlen auffassen. Für reelle Zahlen kann daher $r$ statt $\overline{r}$ geschrieben werden. Im folgendem Satz wird gezeigt, dass ${}^*+$, ${}^*\cdot$, ${}^*\leq$ Fortsetzungen von $+, \cdot, \leq$ sind. Das rechtfertigt $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ statt $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq)$ zu schreiben.

**Satz 14.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
1) $a\, {}^*\!+ b = a + b$
2) $a\, {}^*\!\cdot\, b = ab$
3) $a\, {}^*\!\leq b = a \leq b$

*Beweis.* Seien $a, b \in \mathbb{R}$, also $a = \overline{(a, a, ...)}$ und $b = \overline{(b, b, ...)}$.
1) $a + b = \overline{(a, a, ...)} + \overline{(b, b, ...)} = \overline{(a+b, a+b, ...)} = \overline{(a, a, ...)}\, {}^*\!+ \overline{(b, b, ...)} = a\, {}^*\!+ b$.
2) analog zu 1).
3) $a \leq b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \overline{(a, a, ...)}\, {}^*\!\leq \overline{(b, b, ...)} \Leftrightarrow a\, {}^*\!\leq b$. □

## 3.6 Eindeutigkeit der hyperreellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind eindeutig bestimmt. Das heißt, es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen angeordneten und ordnungsvollständigen Körper. Es stellt sich nun die Frage, ob eine ähnliche Aussage für die hyperreellen Zahlen getroffen werden kann.
Zunächst sei angemerkt, dass es überabzählbar viele freie Ultrafilter auf den natürlichen Zahlen gibt, oder in der algebraischen Interpretation: Überabzählbar viele maximale Ideale in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. [RB, S.33]
Die Frage ist also, ob man bei der Faktorisierung von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nach unterschiedlichen maximalen Idealen auch unterschiedliche Körper erhält, oder ob alle durch unterschiedliche Ideale erzeugte Körper zueinander isomorph sind.
Dies ist unter bestimmten Voraussetzungen der Fall. In [EGH, Corollary 3.6.] wird gezeigt, dass durch unterschiedliche Ideale konstruierte hyperreellen Körper zueinander isomorph sind, wenn man die Kontinuumshypothese als wahr annimmt. Diese besagt, dass es zwischen den Kardinalzahlen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$ keine weitere Kardinalzahl liegt.

## 3.7 Unendliche große und kleine Zahlen

Auf den hyperreellen Zahlen lässt sich nun die Existenz unendlich großer und kleiner Zahlen nachweisen. Dabei verstehen wir unter einer unendlich großen Zahl eine Zahl, welche größer als jede natürliche Zahl ist. Eine unendlich kleine Zahl soll kleiner als jede reziproke natürliche Zahl sein.

**Definition 5.** Seien $\overline{a}, \overline{b} \in {}^*\mathbb{R}$. $\overline{a}$ heißt
1) *finit* (endlich), wenn $\exists n \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \leq n$,
2) *infinit* (unendlich groß), wenn $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \geq n$,
3) *infinitesimal* (unendlich klein), wenn $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \leq \frac{1}{n}$.

$\overline{a}$ und $\overline{b}$ heißen *infinitesimal benachbart* ($\overline{a} \approx \overline{b}$), wenn $\overline{a} - \overline{b}$ infinitesimal ist.

**Bemerkung 5.** In den reellen Zahlen ist 0 das einzige infinitesimale Element. Daher sind zwei reelle Zahlen gleich, wenn die infinitesimal benachbart sind.

**Satz 15.** Sei $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, r \in \mathbb{R}$.
1) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a = r$, so ist $\overline{a} \approx r$.
2) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a = \pm\infty$, so ist $\overline{a}$ infinit.

*Beweis.* 1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a = r$, gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - r| \leq \frac{1}{m}$ für alle $n \geq M$. Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ also $\frac{1}{m} \leq |a_n - r|$, so ist $n \leq M$ und somit: $A = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} \leq |a_n - r|\} \subset \{1, 2, ..., M-1\}$. Weil $\mathcal{U}$ ein freier Ultafiler ist, enthält er keine endlichen Mengen. D.h. $A \notin \mathcal{U}$ und somit gilt $\frac{1}{m} \nleq |\overline{a} - r|$. Weil $\leq$ eine Totalordnung auf ${}^*\mathbb{R}$ ist, folgt $\frac{1}{m} \geq |\overline{a} - r|$. Also ist $\overline{a} - \overline{r}$ infinitesimal ($\overline{a} \approx \overline{b}$).
2) Angenommen $a$ ist bestimmt divergent. Dann gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $M \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \geq m$ für alle $n \geq M$. Daher ist $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq m\} \subset \{1, 2, ...M-1\} \notin \mathcal{U}$ und somit $\overline{a} \geq m$. Also ist $\overline{a}$ infinit. □

**Satz 16** (Existenz infiniter und infinitesimaler Zahlen)**.**
1) Die hyperreellen Zahlen enthalten von Null verschiedene, infinitesimale Elemente.
2) Die hyperreellen Zahlen enthalten infinte Elemente.

*Beweis.* 1) Setze $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n})$. Es ist $\overline{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} \neq \overline{0}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a = 0$ folgt mit Satz 15, dass $\overline{a} \approx 0$ gilt. Also ist $\overline{a} - 0 = \overline{a}$ infinitesimal.
2) Setze $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, ..., n)$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a = \infty$, gilt nach Satz 15, dass $\overline{a}$ infinit ist. □

**Definition 6.** Das archimedische Axiom besagt, dass es zu zwei Größen $y > x > 0$ eine natürliche Zahl n gibt, sodass $nx > y$ gilt.
Ein geordneter Körper, dessen Elemente das archimedische Axiom erfüllen, nennt man *archimedisch geordneten Körper.*

Das archimedische Axiom wurde zwar nach Archimedes benannt, allerdings schon vor Archimedes von Eudoxos formuliert.

**Definition 7.** Eine totalgeordnete Menge heißt *ordnungsvollständig*, wenn jede ihrer nichtleeren nach oben beschränkten Teilmengen ein Supremum besitzt.

Für die reellen Zahlen ist bekannt, dass die sowohl archimedisch angeordnet als auch ordnungsvollständig sind. Die hyperreellen Zahlen erfüllen – weil sie infinite Zahlen enthalten – keine der beiden Eigenschaften.

**Satz 17.**
1) Der Körper ${}^*\mathbb{R}$ ist nicht archimedisch geordnet.
2) Die Menge ${}^*\mathbb{R}$ ist nicht ordnungsvollständig.

*Beweis.* 1) Setze $x = 1$ und $y$ infinit. Dann ist $x < y$ und wäre das archimedische Axiom in ${}^*\mathbb{R}$ gültig, so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y$. Das wäre ein Widerspruch dazu, dass $y$ infinit ist.
2) Es ist $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Die Zahl $\overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}}$ ist eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Aber die natürlichen Zahlen haben keine kleinste obere Schranke in ${}^*\mathbb{R}$. Denn sei $\overline{b}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Weil mit $m \in \mathbb{N}$ auch $m + 1 \in \mathbb{N}$ ist, erfüllen alle natürlichen Zahlen $m$ folgende Ungleichung: $m + 1 \leq \overline{b}$. Folglich gilt für alle natürlichen Zahlen $m \leq \overline{b} - 1$. Das heißt $\overline{b} - 1$ ist wieder eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. □

**Bemerkung 6.** Wird das archimedische Axiom statt für natürliche Zahlen mit hypernatürliche Zahlen formuliert, ist es in ${}^*\mathbb{R}$ gültig. D.h. für $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $y > x > 0$ existiert ein $n \in {}^*\mathbb{N}$, sodass $nx > y$ gilt. Man bezeichnet ${}^*\mathbb{R}$ daher als *-archimedisch geordneten Körper.

## 3.8 Rechnen mit infiniten und infinitesimalen Zahlen

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften von infiniten und infinitesimalen Zahlen sowie der Relation $\approx$ formuliert.

**Satz 18.** Seien $\overline{a}, \overline{b} \in {}^*\mathbb{R}$.
1) $\overline{a}$ ist genau dann infinit, wenn $\overline{a}$ nicht infinit ist.
2) Wenn $\overline{a}$ infinitesimal und ungleich Null ist, so ist $\frac{1}{\overline{a}}$ infinit.
3) Wenn $\overline{a}$ infinit ist, so ist $\frac{1}{\overline{a}}$ infinitesimal.
4) Wenn $\overline{a}$ finit und $\overline{b}$ infinit, so ist $\overline{a} + \overline{b}$ infinit.

*Beweis.* 1) Ist $\overline{a}$ nicht finit, so gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \not\leq n$. Weil $\not\leq$ eine Totalordnung ist, folgt $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \geq n$. Also ist $\overline{a}$ infinit. Analog zeigt man, dass aus $\overline{a}$ infinit folgt $\overline{a}$ nicht finit.
2) Sei $a \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{\overline{0}\}$ infinitesimal. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \leq \frac{1}{n}$. Daraus folgt $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{1}{|\overline{a}|}$, also auch $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq |\frac{1}{\overline{a}}|$. Das heißt $\frac{1}{\overline{a}}$ ist infinit.
3) Sei $\overline{a} \in {}^*\mathbb{R}$ infinit. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq |\overline{a}|$. Daraus folgt $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq |\frac{1}{\overline{a}}|$. Das heißt $\frac{1}{\overline{a}}$ ist infinitesimal.
4) Sei $\overline{a} \in {}^*\mathbb{R}$ finit und $\overline{b} \in {}^*\mathbb{R}$ infinit. Dann gilt $\exists m \in \mathbb{N} : |\overline{a}| \leq m$ und $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq |\overline{b}|$. Dann ist auch $|\overline{b}| \geq m + n$ für alle n.
Mit der Dreiecksungleichung folgt $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a} + \overline{b}| \geq |\overline{b}| - |\overline{a}| \geq (m + n) - m = n$. Das heißt $\overline{a} + \overline{b}$ ist infinit. □

**Satz 19.** Es ist $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$. Des Weiteren gilt für $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b_1}, \overline{b_2} \in {}^*\mathbb{R}$:
1)$\overline{a_1} \approx \overline{a_2}, \overline{b_1} \approx \overline{b_2} \Rightarrow \overline{a_1} + \overline{b_1} \approx \overline{a_2} + \overline{b_2}$,
2)$\overline{a_1} \approx \overline{a_2}, \overline{b_1} \approx \overline{b_2}; \overline{a_1}, \overline{b_1}$ finit $\Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{b_1} \approx \overline{a_2} \cdot \overline{b_2}$

*Beweis.* Zunächst werden die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nachgewiesen.
Reflexivität: $\overline{a} \approx \overline{a} \Leftrightarrow \overline{a} - \overline{a}$ infinitesimal $\Leftrightarrow \overline{0}$ infinitesimal.
Symmetrie: Sei $\overline{a} \approx \overline{b} \Rightarrow \overline{a} - \overline{b}$ infinitesimal $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a} - \overline{b}| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |\overline{b} - \overline{a}| \leq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \overline{a} - \overline{b}$ infinitesimal $\Rightarrow \overline{b} \approx \overline{a}$.
Transitivität: Sei $\overline{a} \approx \overline{b}$ und $\overline{b} \approx \overline{c} \Rightarrow \overline{a} - \overline{b}$ und $\overline{b} - \overline{c}$ infinitesimal $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a} - \overline{b}| \leq \frac{1}{2n}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{b} - \overline{c}| \leq \frac{1}{2n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a} - \overline{b}| + |\overline{b} - \overline{c}| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a} - \overline{c}| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \overline{a} - \overline{c}$ infinitesimal $\Rightarrow \overline{a} \approx \overline{c}$.
1) Sei $\overline{a_1} \approx \overline{a_2}, \overline{b_1} \approx \overline{b_2}$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a_1} - \overline{a_2}| \leq \frac{1}{2n}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{b_1} - \overline{b_2}| \leq \frac{1}{2n}$. Es folgt wieder mit der Dreiecksungleichung $\forall n \in \mathbb{N} : |(\overline{a_1} + \overline{b_1}) - (\overline{a_2} + \overline{b_2})| = |(\overline{a_1} - \overline{a_2}) + (\overline{b_1} - \overline{b_2})| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. Das heißt $\overline{a_1} + \overline{b_1} \approx \overline{a_2} + \overline{b_2}$.
2) Sei $\overline{a_1} \approx \overline{a_2}, \overline{b_1} \approx \overline{b_2}, \overline{a_1}, \overline{b_1}$endlich. Wegen $\overline{b_1} \approx \overline{b_2}$ ist auch $\overline{b_2}$ endlich. Daher gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|\overline{a_1}| \leq n_1$ und $|\overline{b_2}| \leq n_2$. Weiterhin gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{a_2} - \overline{a_1}| \leq \frac{1}{2n_1 \cdot n}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : |\overline{b_2} - \overline{b_1}| \leq \frac{1}{2n_2 \cdot n}$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N} : |\overline{a_1}\overline{b_1} - \overline{a_2}\overline{b_2}| = |\overline{a_1}\overline{b_1} - \overline{a_1}\overline{b_2} + \overline{a_1}\overline{b_2} - \overline{a_2}\overline{b_2}| \leq |\overline{a_1}\overline{b_1} - \overline{a_1}\overline{b_2}| + |\overline{a_1}\overline{b_2} - \overline{a_2}\overline{b_2}| = |\overline{a_1}||\overline{b_1} - \overline{b_2}| + |\overline{b_2}||\overline{a_1} - \overline{a_2}| \leq n_1 \frac{1}{2n_1 \cdot n} + n_2 \frac{1}{2n_2 \cdot n} = \frac{1}{n}$. □

**Bemerkung 7.** Die Äquivalenzklassen von $\approx$ bezeichnet man als *Monaden* und schreibt für die Monade eines Punktes $m(\overline{x}) := \{\overline{y} \in {}^*\mathbb{R} : x \approx y\}$.

## 3.9 Der Standardteil hyperreeller Zahlen

Jede endliche hyperreelle Zahl $x \in {}^*\mathbb{R}$ lässt sich eindeutig in eine reelle Zahl $r$ und eine infinitesimale Zahl $\epsilon$ zerlegen ($x = r + \epsilon$), wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 20.** Ist $x \in {}^*\mathbb{R}$ endlich, so existiert ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{R}$ mit $x \approx r$.

*Beweis.* Existenz: Da $x$ endlich ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq m$. Setze $A := \{s \in \mathbb{R} : s \leq x\} \subseteq \mathbb{R}$. Wegen $-m \in A$ ist $A$ nicht leer und wegen $s \leq m$ für alle $s \in A$ ist $A$ nach oben beschränkt. Weil $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist, besitzt $A$ eine kleinste obere Schranke $r := \sup A \in \mathbb{R}$. Um nachzuweisen, dass x und r infinitesimal benachbart sind, ist folgende Ungleichung zu zeigen: $r - \frac{1}{n} \leq x \leq r + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Da $r$ obere Schranke von $A$ ist, gilt $r + \frac{1}{n} \notin A$ und somit $x \leq r + \frac{1}{n}$. Da $r$ die kleinste obere Schranke von $A$ ist, kann $r - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke sein und es existiert ein $s \in A$ mit $s \nleq r - \frac{1}{n}$. Folglich ist $r - \frac{1}{n} \leq s \leq x$. Damit ist $r - \frac{1}{n} \leq x \leq r + \frac{1}{n}$ für alle $n$ gezeigt und es gilt $x \approx r$.
Eindeutigkeit: Sei $r' \in \mathbb{R}$ eine weiteres Element mit $x \approx r'$. Aus $x \approx r$ und $x \approx r'$ folgt $r \approx r'$. Und da $r$ und $r'$ reell sind folgt daraus $r = r'$. □

**Definition 8.** Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ finit und sei $r \in \mathbb{R}$ diejenige Zahl, für die $x \approx r$ gilt. Dann nennt man $r := st(x)$ den *Standardteil* von x.

Wie später zu sehen ist, lassen sich mit Hilfe des Standardteils Aussagen über Folgen und Funktionen formulieren. So kann bspw. die Ableitung einer Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0$ als $f'(x) := st(\frac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x-x_0})$ definiert werden.
Zuvor sollen aber noch einige Rechenregeln für den Standardteil nachgewiesen werden.

**Satz 21.** Bezeichne $fin({}^*\mathbb{R})$ die Menge der finiten hyperreellen Zahlen. Dann ist $st : fin({}^*\mathbb{R}) \to {}^*\mathbb{R}$ und für $x_1, x_2 \in fin({}^*\mathbb{R})$ gilt:
1) $st(x_1 + x_2) = st(x_1) + st(x_2)$,
2) $st(x_1 \cdot x_2) = st(x_1) \cdot st(x_2)$,
3) $st(\frac{x_1}{x_2}) = \frac{st(x_1)}{st(x_2)}$ für $st(x_2) \neq 0$ ,
4) $st(x_1^n) = st(x_1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
5) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow st(x_1) \leq st(x_2)$.

*Beweis.* 1) Seien $x_1, x_2 \in fin({}^*\mathbb{R})$. Dann existieren $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \approx r_1$ und $x_2 \approx r_2$. Daraus folgt $x_1 + x_2 \approx r_1 + r_2$. Daher gilt $st(x_1 + x_2) = r_1 + r_2 = st(x_1) + st(x_2)$.
2) Seien $x_1, x_2 \in fin({}^*\mathbb{R})$. Dann existieren $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \approx r_1$ und $x_2 \approx r_2$. Daraus folgt $x_1 \cdot x_2 \approx r_1 \cdot r_2$. Daher gilt $st(x_1 \cdot x_2) = r_1 \cdot r_2 = st(x_1) \cdot st(x_2)$.
3) Wegen $x_2$ finit und $st(x_2) \neq 0$ ist $\frac{1}{x_2}$ finit. Also gibt es ein $r_2 \in \mathbb{R}$ mir $\frac{1}{x_2} \approx r_2$. Daraus folgt $x_2 \approx \frac{1}{r_2}$, weswegen $st(\frac{1}{x_2}) = \frac{1}{st(x_2)}$ gilt. Mit 2) erhält man $st(\frac{x_1}{x_2}) = st(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}) = st(x_1) \cdot st(\frac{1}{x_2}) = st(x_1) \cdot \frac{1}{st(x_2)} = \frac{st(x_1)}{st(x_2)}$.
4) Folgt mit Induktion aus 2).
5) Sei $x_1 \leq x_2$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann: $st(x_1) \leq x_1 + \frac{1}{n} \leq x_2 + \frac{1}{n} \leq st(x_2) + \frac{2}{n}$. Da $st(x_1)$ und $st(x_2)$ reelle Zahlen sind, gilt $st(x_1) \leq st(x_2)$. □

**Bemerkung 8.** Die Struktur $(fin({}^*\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist ein Unterring von $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$. Mit $st(1) = 1$, $st(0) = 0$ und Satz 21 1), 2) ist die Abbildung $st : fin({}^*\mathbb{R}) \to {}^*\mathbb{R}$ ein Ringhomomorphismus.

# 4 Analysis auf ${}^*\mathbb{R}$

Im folgenden Abschnitt soll gezeigt werden, wie man Konzepte aus der Analysis auf den hyperreellen Zahlen umsetzen kann.
Ein naheliegender Gedanke wäre, allgemeine Funktionen $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ zu untersuchen. Tatsächlich lassen sich Begriffe wie Stetigkeit für derartige Funktionen auf folgende Weise definieren.

**Definition 9.** Sei $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ stetig im Punkt $x_0$, wenn für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:

$$x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0).$$

Diese Form der Stetigkeit beschreibt für derart allgemeine Funktionen allerdings ein anderes Konzept, als die aus der Standard-Analysis bekannte $\varepsilon$–$\delta$–Stetigkeit. Es lassen sich Funktionen finden, die stetig im Sinne von Definition 9, aber nicht $\varepsilon$–$\delta$–Stetigkeit

stetig sind. [LR, S. 180]
Um derartige Funktionen auszuschließen, werden hier nur reellwertige Funktionen und ihre Fortsetzung auf ${}^*\mathbb{R}$ betrachtet.

## 4.1 Fortsetzung von Funktionen auf ${}^*\mathbb{R}$

Mit $f \circ g$ sei die Komposition von Funktionen $f$ und $g$ bezeichnet. Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so ist $(f \circ a) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $(f \circ a)(n) := f(a_n), n \in \mathbb{N}$ definiert.
Jeder Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll auf folgende Weise eine Fortsetzung ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ zugeordnet werden.

**Definition 10.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\overline{a} \in {}^*\mathbb{R}$ setzt man:

$$ {}^*f(\overline{a}) := \overline{b} \text{ mit } b_n := f(a_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}. $$

Der folgende Satz stellt sicher, dass ${}^*f(\overline{a})$ wohldefiniert und tatsächlich eine Fortsetzung von $f$ ist.

**Satz 22.** Es ist ${}^*f(\overline{a})$ nicht von der Wahl des Repräsentanten von $\overline{a}$ abhängig. Daher ist ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:
1) ${}^*f(r) = f(r)$ für $r \in \mathbb{R}$,
2) ${}^*f(\overline{a}) = \overline{f \circ a}$ für $\overline{a} \in {}^*\mathbb{R}$.

*Beweis.* Wohldefiniert: Sei $\overline{a} = \overline{a'}$. Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : a_n = a'_n\} \in \mathcal{U}$. Wenn $a_n = a'_n$ ist, gilt auch $f(a_n) = f(a'_n)$ und somit $\{n \in \mathbb{N} : f(a_n) = f(a'_n)\} \in \mathcal{U}$. Daher gilt ${}^*f(\overline{a}) = {}^*f(\overline{a'})$.
2) Es gilt ${}^*f(\overline{a}) = \overline{b}$ und $b_n = f(a_n) = (f \circ a)(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\overline{b} = \overline{f \circ a}$ und somit ${}^*f(\overline{a}) := \overline{f \circ a}$.
1) Wegen $f \circ r = (f(r))_{n\in\mathbb{N}}$ gilt ${}^*f(r) = {}^*f(\overline{r}) = \overline{f \circ r} = f(r)$. □

**Beispiel 2.**

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto sin(x)$. Dann ist die Fortsetzung ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ durch ${}^*f(\overline{x}) = \overline{(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}} =: {}^*sin(\overline{x})$ gegeben.

- Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$ Dann ist die Fortsetzung durch ${}^*(g \circ f) = \overline{(e^{x_n^2})_{n\in\mathbb{N}}}$ gegeben.

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Die Fortsetzung von $f$ bildet dann infinite auf infinitesimale und infinitesimale auf infinite Elemente ab. ${}^*f(\overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}}) = \overline{(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}}$, ${}^*f(\overline{(1/n)_{n\in\mathbb{N}}}) = \overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}}$.
  Am diesem Beispiel ist auch zu sehen, dass Bilder von infinitesimal benachbarten Zahlen im allgemeinen nicht infinitesimal benachbart sind. So ist $\overline{(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}} \approx \overline{(\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}}$, wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = 0$. Aber $\overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}} - \overline{(2n)_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(-n)_{n\in\mathbb{N}}}$ ist infinit, weswegen ${}^*f(\overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}}) \not\approx {}^*f(\overline{(2n)_{n\in\mathbb{N}}})$ gilt.

- Für $\omega$ infinit ist $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}, x \to \omega x$ keine Fortsetzung einer reellwertigen Funktion.

Direkt aus Satz 22 2) folgen die Rechenregeln für Fortsetzungen von Funktionen.

**Satz 23.** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann gilt:
1) ${}^*(f \pm g) = {}^*f \pm {}^*g$.
2) ${}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g$
3) ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$

## 4.2 Stetigkeit

Mit Hilfe der ${}^*f$-Fortsetzung lässt sie die Stetigkeit von Funktionen auf besonders intuitive Weise ausdrücken. Eine Funktion soll stetig sein, wenn infinitesimale Änderungen im Funktionsargument zu infinitesimalen Änderungen im Funktionswert führen.

**Definition 11.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkt $x_0$, wenn für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:

$$x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0).$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf $D$, wenn sie für alle $x_0 \in D$ stetig ist.

Mit dieser Definition lassen sich leicht zeigen, dass auch Summen, Produkte und Kompositionen stetiger Funktionen wieder stetig sind.

**Satz 24.** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in $x_0$ sind. Dann gilt:
1) $f \pm g$ ist stetig in $x_0$,
2) $f \cdot g$ ist stetig in $x_0$.
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $f$ in stetig $x_0$ und $g$ stetig in $f(x_0)$ sei. Dann gilt:
3) $g \circ f$ ist stetig in $x_0$.

*Beweis.* 1) Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ mir $x \approx x_0$. Weil $f$ und $g$ stetig sind, folgt ${}^*f(x) \approx f(x_0)$ und ${}^*g(x) \approx g(x_0)$. Daraus folgt ${}^*(f \pm g)(x) = {}^*f(x) \pm {}^*g(x) \approx f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0)$. Also ist $f \pm g$ in $x_0$ stetig.
2) Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ mir $x \approx x_0$. Weil $f$ und $g$ stetig sind, folgt ${}^*f(x) \approx f(x_0)$ und ${}^*g(x) \approx g(x_0)$. Daraus folgt ${}^*(f \cdot g)(x) = {}^*f(x) \cdot {}^*g(x) \approx f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$. Also ist $f \cdot g$ in $x_0$ stetig.
3) Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ mir $x \approx x_0$. Weil $f$ in $x_0$ stetig ist, folgt ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. Und wegen $g$ stetig in $f(x_0)$ gilt dann: ${}^*(g \circ f)(x) = {}^*g({}^*f(x)) \approx g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. Also ist $(g \circ f)$ in $x_0$ stetig. $\square$

**Beispiel 3.**

- Polynome sind stetig. Offensichtlich ist $f(x) = x$ stetig. Mit Satz 24 2) und Induktion folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ auch $a \cdot x^n$ stetig ist. Mit Satz 24 1) folgt, dass $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ stetig ist.

- Es ist $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \in {}^*\mathbb{R}$ mir $x \approx x_0$. Dann gilt $x - x_0 \approx 0$. Wegen $x_0 \neq 0$ folgt $x \not\approx 0$ und somit ist $\frac{1}{x \cdot x_0}$ finit. Nach Satz 19 gilt daher $\frac{1}{x \cdot x_0}(x - x_0) \approx 0$. Da $\frac{1}{x \cdot x_0}(x - x_0) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$ gilt ist $\frac{1}{x_0} \approx \frac{1}{x}$. Damit ist die Stetigkeit von $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gezeigt.

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ .
  $f$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig. Sei $x \approx x_0$, $x \neq x_0$. Dann ist ${}^*f(x) = 0 \not\approx 1 = f(0)$.

Wie bereits erwähnt, führt die Einschränkung auf reelle Funktionen dazu, dass die Stetigkeit nach Definition 11 äquivalent zur $\varepsilon$–$\delta$–Stetigkeit ist. Dies zeigt der folgende Satz.

**Satz 25.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:
1) $\forall x \in {}^*\mathbb{R} : x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt: $x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$.
2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

*Beweis.* ($\Leftarrow$) Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ mir $x \approx x_0$. Es ist zu zeigen, dass $|{}^*f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.
Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nach 2) ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, sodass für $r \in \mathbb{R}$ mit $|r - x_0| < \delta$ folgt $|f(r) - f(x_0)| \leq \frac{1}{m}$. Wegen $x \in {}^*\mathbb{R}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x = \overline{a}$. Damit gilt $\overline{a} \approx x_0$, und somit $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - x_0| \leq \delta\} \in \mathcal{U}$. Daraus folgt $\{n \in \mathbb{N} : |f(a_n) - f(x_0)| \leq \frac{1}{m}\}$. Das bedeutet $|\overline{f \circ a} - f(x_0)| = |{}^*f(\overline{a}) - f(x_0)| = |{}^*f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{m}$.
($\Rightarrow$) Angenommen 2) gelte nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
i) $|a_n - x| \leq \frac{1}{n}$,
ii) $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.
Wegen i) ist $x := \overline{a} \approx x_0$. Daraus folgt ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. Mit ii) folgt, dass $|{}^*f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, im Widerspruch zu ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. $\square$

## 4.3 Differenzierbarkeit

Die Ableitung einer Funktion kann mit Hilfe ihrer Fortsetzung als Quotient zweier infinitesimaler Größen berechnen. Die folgende Definition entspricht damit der Vorstellung, welche die Begründer der Infinitesimalrechnung von Differenzierbarkeit hatten.

**Definition 12.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt $f$ in $x_0$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = c$, wenn gilt:

$$\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \approx c \text{ für alle } 0 \neq dx \approx 0$$

.

Durch Übergang zum Standardteil erhält man Gleichheit für $c$ und den Differentialquotienten. Manchmal wird die Ableitung daher als

$$f'(x_0) = st(\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx})$$

definiert, falls $\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$ finit ist.
Wie bei der Stetigkeit, kann gezeigt werden, dass die Standarddefinition von Differenzierbarkeit für reellwertige Funktionen mit Definition 12 übereinstimmt.

Aus der obriger Definition ergeben sich die bekannten Regeln für das Ableiten von Funktionen.

**Satz 26.** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
1) $(x^n)' = nx^{n-1}$
2) $(f + g)' = f' + g'$
3) $(a \cdot f)' = a \cdot f'$
4) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
5) $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

*Beweis.* 1) $\frac{{}^*f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{{}^*(x + dx)^n - x^n}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k dx^{n-k} - x^n}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k dx^{n-k} - x^n + nx^{n-1}dx}{dx} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k dx^{n-k-1} - x^n + nx^{n-1} \approx nx^{n-1}$
Also $f'(x) = nx^{n-1}$.
2) Seien $f, g$ differenzierbar in $x_0$ mit Ableitungen $f'(x_0) = c_1$ und $g'(x_0) = c_2$.
Dann gilt $\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \approx c_1$ und $\frac{{}^*g(x_0 + dx) - g(x_0)}{dx} \approx c_2$ für alle $0 \neq dx \approx 0$.
Wegen Satz 19 1) ist
$\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} + \frac{{}^*g(x_0 + dx) - g(x_0)}{dx} = \frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0) + ({}^*g(x_0 + dx) - g(x_0))}{dx} = \frac{{}^*(f + g)(x_0 + dx) - (f + g)(x_0)}{dx} \approx c_1 + c_2$.
Damit gilt $(f + g)'(x_0) = c_1 + c_2 = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3) Sei $(af)$ in $x_0$ differenzierbar mit Ableitung $(af)'(x_0) = c$. Dann gilt $\frac{a\,{}^*f(x_0 + dx) - af(x_0)}{dx} = a\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \approx c$. Das heißt $af'(x_0) = c$ und somit $(af)'(x_0) = af'(x_0)$.
4) Sei $(f \cdot g)$ in $x_0$ differenzierbar mit Ableitung $(f \cdot g)'(x_0) = c$. Dann gilt:
$\frac{{}^*f(x_0 + dx)\,{}^*g(x_0 + dx) - f(x_0)g(x_0)}{dx} = \frac{{}^*f(x_0 + dx)\,{}^*g(x_0 + dx) - f(x_0)g(x_0)}{dx} + \frac{f(x_0)\,{}^*g(x_0 + dx)}{dx} - \frac{f(x_0)\,{}^*g(x_0 + dx)}{dx} = {}^*g(x_0 + dx)\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} + f(x_0)\frac{{}^*g(x_0 + dx) - g(x_0)}{dx} \approx c$.
Also gilt $g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = c = (fg)'(x_0)$.
5) Sei $h = \frac{f}{g}$. Durch Anwenden von 4) auf $f = gh$ erhält man $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$. □

Auch wenn es in Satz 26 1) schon in allgemeinerer Form gezeigt wurde, soll noch einmal der Beweis für die Ableitung von $f(x) = x^2$ aus der Einleitung betrachtet werden. Auf Berkeleys Kritik an der Rechnung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = 2x + dx = 2x,$$

kann erwidert werden, dass das Problem nicht in der Verwendung infinitesimaler Zahlen, sondern in einer doppeldeutigen Verwendung des Gleichheitszeichen lag. Mit der bisher erarbeiteten Theorie lässt sich korrekt schreiben:

$$\frac{{}^*f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{(x_0+dx)^2 - x_0^2}{dx} = \frac{x_0^2 + 2x_0dx + dx^2 - x_0^2}{dx} = 2x_0 + dx \approx 2x_0.$$

Damit gilt $f'(x_0) = 2x_0$.

# 5 Literaturverzeichnis

[EGH] Erdös, P. Gillman, L. Henriksen, M. (1955) *An isomorphism theorem for real-closed Fields.* Annals of Mathematics, 61, 542-554

[RB] Goldblatt, R. (1998) *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis.* Springer-Verlag. New York.

[HH] Heuser, H. (2008) *Lehrbuch der Analysis Teil 2.* Vieweg+Teubner Verlag. Wiesbaden.

[LR] Landers, D. Rogge, L. (1994) *Nichtstandard Analysis.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.

[DL] Laugwitz, D. (1987) *Zahlen und Kontinuum. Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik.* Bibliographisches Institut. Zürich.